Rancangan Faktorial Pecahan

– Bagian 2: Rancangan Non-Reguler –

Bagus Sartono

25 Januari 2009

1 Pendahuluan

Pada bagian 1 telah dibahas mengenai rancangan FF reguler mulai dari motivasi, pembuatan rancangan, hingga klasifikasinya. Penggunaan rancangan FF reguler mampu memberikan penghematan yang cukup signifikan dan sangat membantu para peneliti mengerjakan percobaan pada saat biaya dan sumberdaya yang dia miliki tidak cukup untuk melibatkan semua kombinasi.

Namun perlu diingat bahwa pada saat kita mengerjakan rancangan FF reguler maka banyaknya *runs* harusnya dalam bentuk pangkat dari dua atau 2^m jika seluruh faktor memiliki dua taraf atau 3^n kalau seluruhnya tiga taraf, atau $2^m 4^n$ kalau campuran antara dua dan empat taraf.

Untuk rancangan 2^{k-p} misalnya, maka jumlah run akan sebesar 4, 8, 16, 32, 64, ... runs. Seandainya percobaan kita melibatkan 7 faktor dua taraf maka ukuran yang diperlukan minimal 8 untuk dapat menduga seluruh pengaruh utama. Kita bisa menggunakan rancangan 2^{7-4}. Karena seluruh derajat bebas telah habis digunakan untuk menduga rata-rata umum dan pengaruh utama, rancangan ini dikenal juga sebagai rancangan **jenuh (*saturated*)**. Pembahasan mengenai rancangan lain akan dibicarakan dalam tulisan lain. Dengan 8 runs pada rancangan 2^{7-4} maka tidak ada derajat bebas yang dapat digunakan menduga interaksi dua faktor. Untuk melakukan ini, jumlah runs harus ditambah dan pilihannya 16. Pilihan ini barangkali tidak menguntungkan jika kita memperkirakan bahwa hanya sedikit saja pengaruh interaksi dua faktor yang aktif. Menggunakan 12 runs mungkin terasa lebih masuk akal.

Pilihan 12 runs juga lebih hemat untuk percobaan *screening* yang melibatkan 10 faktor dua taraf misalnya. Tentu tidak mungkin menggunakan 8 runs karena tidak cukup banyak untuk dapat menduga seluruh pengaruh utama. Menggunakan 16 runs akan menyisakan terlalu banyak derajat bebas.

Selisih jumlah runs semakin besar untuk rancangan FF tiga taraf 3^{k-p} karena pilihannya adalah 9, 27, 81, ... runs. Jika ada 15 faktor yang terlibat, maka diperlukan 30 derajat bebas untuk menduga pengaruh utama dan 1 untuk rata-rata umum. Percobaan 27 runs tidak dapat mengakomodir masalah ini, tetapi menggunakan 81 runs akan menjadi sangat mahal. Jika dapat menggunakan 36 runs saja misalnya, maka akan sangat membantu para peneliti menghemat biaya pelaksanaan percobaan.

Dengan jumlah run yang bukan berupa 2^m, 3^n, atau $2^m 4^n$, maka rancangan FF diperoleh tidak dengan cara yang sama dengan rancangan FF reguler. Artinya dalam rancangan ini tidak dikenal lagi istilah *generator* dan *defining relation*. Rancangan yang selanjutnya disebut rancagan FF non-reguler akan dibangkitkan menggunakan suatu susunan matriks yang dikenal sebagai ***orthogonal array***.

Selanjutnya, hal lain yang membedakan dengan rancangan FF reguler adalah struktur alias antar pengaruh. Pada FF reguler, dua buah pengaruh memiliki kemungkinan:**saling bebas** dan **beralias penuh** (***fully-aliased***). Sedangkan pada rancangan FF non-reguler, terdapat satu kemungkinan lagi yaitu beralias secara parsial (***partially-aliased***).

Skema dari tulisan tentang rancangan FF non-reguler ini akan dimulai dengan bab berisi pembahasan mengenai *orthogonal array* dan penggunaannya untuk memperoleh rancangaan FF non-reguler. Berikutnya akan didiskusikan mengenai struktur alias yang melibatkan alias parsial. Seperti halnya pada rancangan reguler, terdapat beberapa metodologi dalam mengklasifikasikan rancangan, dan ini akan didiskusikan pada bab berikutnya.

2 *Orthogonal Array*

Sebelum jauh-jauh bicara *orthogonal array* (OA) dan penggunaannya dalam perancangan percobaan, ada baiknya kita lihat terlebih dahulu susunan angka di bawah ini.

susunan pertama	susunan kedua
0 0 0 0	0 0 0 1
0 0 1 1	0 0 1 0
0 1 0 1	0 1 0 1
0 1 1 0	0 1 1 0
1 0 0 0	1 0 0 0
1 0 1 1	1 0 1 1
1 1 0 1	1 1 0 0
1 1 1 0	1 1 1 1

Masing-masing susunan di atas terdiri atas 4 kolom dan 8 baris. Setiap kolom, hanya terdiri atas dua jenis angka 1 dan 0. Apa yang menarik dari susunan tersebut?

Sekarang kita lihat dulu susunan pertama. Kalau diperhatikan setiap kita pilih tiga kolom, yang manapun, maka kita akan menemukan setiap kemungkinan kombinasi angka. Karena ada dua jenis setiap kolomnya, maka kalau dipilih tiga kolom terdapat $2 \times 2 \times 2 = 8$ kemungkinan kombinasi yaitu 000, 001, 010, 001, 011, 101, 110, 111. Sekali lagi, ambil tiga kolom yang manapun, maka delapan kombinasi itu ada semua, dan masing-masing ada satu.

Berbeda dengan susunan yang kedua. Kalau kita pilih 3 kolom, misalnya kolom ke-1, ke-3, dan ke-4, maka yang kita dapatkan seperti di bawah ini. Tidak semua 8 kombinasi ada. Sebut saja, 000 tidak ada dalam tiga kolom tersebut.

0	0	1
0	1	0
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1
1	0	0
1	1	1

Bagaimana jika seandainya kita pilih 2 kolom? Karena hanya dua kolom, maka ada empat kemungkinan kombinasi yaitu 00, 01, 10, 11. Dari kedua susunan, kalau kita ambil sembarang dua kolom, maka keempat kombinasi itu ada, dan masing-masing kombinasi muncul dua kali. Dapat diperiksa bahwa dari setiap dua kolom, maka kita bisa menemukan kombinasi 00 ada dua baris, 01 ada dua baris, 10 ada dua baris, dan terakhir 11 juga ada dua baris.

Rangkuman yang bisa kita buat dari kegiatan di atas adalah sebagai berikut:

- Pada susunan yang pertama, setiap kita ambil **tiga kolom** maka semua kedelapan kombinasi ada dan jumlah munculnya sama banyak yaitu satu kali/baris.
- Pada susunan yang kedua, kalau kita ambil tiga kolom maka tidak semua kedelapan kombinasi ada.
- Tetapi, pada susunan yang kedua dan yang pertama, setiap kita ambil **dua kolom** maka semua keempat kombinasi ada dan jumlah munculnya sama banyak yaitu dua kali/baris.

Susunan pertama disebut sebagai OA dengan ***strength*** 3, sedangkan yang kedua OA dengan *strength* 2. Istilah *strength*, mengacu pada jumlah kolom terbanyak sehingga semua kombinasi ada dengan frekuensi kemunculan sama besar.

Mengulang saja, OA adalah susunan baris-kolom, dimana kalau kita ambil beberapa kolom dengan jumlah tertentu, maka kombinasi yang mungkin terbentuk muncul dengan frekuensi yang sama. Jumlah tertentu tersebut dikenal sebagai *strength*.

OA dengan runs sebanyak n serta k kolom, dan memiliki *strength* t dilambangkan sebagai $OA(n, s_1 \times s_2 \times ... \times s_k, t)$, dengan s_i adalah jumlah taraf pada kolom ke-i. Jika seluruh kolom memiliki taraf yang sama yaitu sebesar s, bisa dituliskan sebagai $OA(n, s^k, t)$. Beberapa literatur menyebut OA dengan taraf campuran sebagai *mixed-level OA* atau *asymmetrical OA*.

OA dapat digunakan sebagai cara untuk membangkitkan rancangan FF dengan mengganti symbol pada OA sesuai dengan simbol taraf. Rancangan FF yang melibatkan k faktor dua taraf dapat dituliskan sebagai $OA(n, 2^k, t)$, dengan t tertentu. Sedangkan rancangan FF tiga taraf menggunakan $OA(n, 3^k, t)$. OA dapat digunakan untuk memperoleh rancangan FF reguler maupun non-reguler.

Seperti yang sudah kita diskusikan melalui ilustrasi, jika kita menggunakan OA dengan *strength* 2, maka seluruh kombinasi dua faktor ada setiap kita pilih dua kolom. Ini berarti bahwa dengan menggunakan OA ini sebagai rancangan maka seluruh pengaruh utama dapat diduga saling bebas satu sama lain. Artinya tidak ada alias antar pengaruh utama. Namun karena kalau dipilih 3 kolom tidak semua kombinasi taraf tiga faktor ada di dalamnya, maka ada pengaruh utama yang beralias dengan interaksi dua faktor.

Sementara itu pada kasus rancangan yang menggunakan OA dengan *strength* 3, pengaruh utama tidak beralias dengan pengaruh utama lain maupun interaksi dua faktor.

Jika rancangan FF reguler menggunakan OA untuk membangkitkannya, bukan menggunakan generator, maka OA dengan *strength* 2 akan menghasilkan rancangan FF dengan resolusi III. Sedangkan OA dengan *strength* 3 menghasilkan rancangan FF resolusi IV.

OA yang digunakan untuk mendapatkan rancangan FF dua taraf antara lain dapat diperoleh menggunakan matriks Hadamard, sebuah matriks yang hanya memiliki unsur ± 1 dan kolom-kolom dan baris-barisnya bersifat saling ortogonal. Hedayat, Sloane, dan Stufken (1999) menyajikan secara komprehensif pembahasan tentang OA dan berbagai sifat-sifatnya termasuk beberapa teknik membuat OA.

Untuk OA dengan taraf campuran, Wu dan Hamada (2000) pada bab 7 menjelaskan secara rinci penggunaan metode *difference matrices* dan *method of replacement*. Pembaca yang tertarik bagaimana memperoleh OA dapat membaca bab tersebut.

Sloane juga membuat kumpulan matriks Hadamard yang bermanfaat dalam memperoleh OA dan dapat diakses di website-nya http://www.research.att.com/ njas/oadir/. Kumpulan OA lain yang juga cukup kaya adalah yang dimilik oleh SAS pada http://support.sas.com/techsup/technote/ts723.html.

3 *Partial Aliasing*

Seperti yang disinggung sebelumnya bahwa pada rancangan FF non-reguler terdapat pola pembauran yang berbeda dengan rancangan FF reguler yang disebut sebagai *partial aliasing*. Istilah ini digunakan untuk membedakan dengan bentuk alias pada FF reguler. Jika pada FF reguler misalnya kita hanya menemukan pola alias yang misalnya berupa $A = BCD$, yang berarti bahwa pengaruh A dan BCD berbaur dan ketika kita menghitung dugaan besarnya pengaruh A maka formula yang digunakan sama dengan untuk menduga besarnya pengaruh BCD. Dan dugaan yang diperoleh sebenarnya adalah pengaruh $A + BCD$.

Tetapi pada rancangan FF non-reguler dapat berupa $A = \frac{1}{3}ABC$. Dalam hal ini besarnya pengaruh A berbaur dengan $\frac{1}{3}$ atau sebagian (parsial) dari pengaruh ABC. Bagian lain dari ABC mungkin berbaur dengan pengaruh lainnya.

Dengan kata lain pada rancangan FF reguler, besarnya koefisien aliasing hanya berupa 0 atau ± 1, sedangkan pada FF non-reguler bisa mengambil sembarang nilai antara -1 dan $+1$. Koefisien sebesar 0 disebut ortogonal atau saling bebas; sebesar ± 1 disebut beralias penuh (*fully-aliased*); dan selain itu disebut beralias secara parsial (*partially aliased*). Pembahasan lebih rinci tentang penghitungan koefisien alias ini dapat dilihat pada Wu dan Hamada (2000).

4 Klasifikasi Rancangan FF Non-Reguler

Perkembangan komputasi yang dapat dimanfaatkan untuk membangkitkan rancangan menggunakan *orthogonal array* memunculkan pertanyaan rancangan mana yang sebaiknya digunakan. Beberapa ahli mengusulkan pengklasifikasian rancangan sehingga dapat dinilai mana yang lebih baik. Pada tulisan Bagian 1 tentang rancangan FF reguler, telah didiskusikan penggunaan resolusi maksimum (Box dan Hunter, 1961) dan *aberration* (Fries dan Hunter, 1980). Berikutnya akan didiskusikan berbagai kriteria yang digunakan untuk rancangan FF non-reguler. Sedapat mungkin usulan para ahli tersebut akan diurutkan berdasarkan tahun publikasinya.

4.1 *Generalized Resolution*

Publikasi Deng dan Tang (1999) dan Tang dan Deng (1999) termasuk generasi pertama yang secara runut memberikan perhatian kepada pengklasifikasian rancangan FF non-reguler khususnya rancangan dengan faktor dua taraf. Pengklasifikasian rancangan FF non-reguler oleh keduanya dilakukan dengan melibatkan besaran yang mirip dengan korelasi berganda antar kolom pada rancangan non-reguler. Deng dan Tang(1999) menggunakan istilah J-characteristic terhadap besaran nilai mutlak jumlah hasil kali antar kolom yang didefinisikan sebagai berikut.

Jika kita memiliki suatu rancangan dua taraf yang melibatkan k kolom dan N runs, dengan nilai tarafnya +1 atau -1 maka kita memiliki matriks R = (r_{ij}) dengan $r_{ij} = +1$ atau -1 untuk semua $i =$ 1, 2, ..., N dan $j =$ 1, 2, ..., k. Andaikan $s = [c_1, ..., c_p]$ adalah anak matriks R berukuran p kolom, J-characteristic dari s didefinisikan sebagai:

$$J_p(s) = |j_p(s)| \text{ dengan } j_p(s) = \sum_{i=1}^{N} c_{i1} \times c_{i2} \times ... \times c_{ip}$$

Perhatikan bahwa karena setiap kolom pada R bernilai +1 dan -1 dan saling ortogonal satu sama lain, maka rata-rata dari setiap kolom sama dengan nol dan $j_p(s)$ merupakan jumlah hasil kali dan $\frac{j_p(s)}{N}$ adalah korelasi berganda kolom-kolom pada s. Nilai $j_p(s)$ ini tidak lain adalah koefisien alias yang dibicarakan pada bab sebelumnya. Artinya jika seandainya $s = [A, B, C]$ dan $\frac{j_3(s)}{N} = -\frac{1}{3}$ maka $-\frac{1}{3}$ adalah korelasi antara A dengan BC atau A beralias dengan $-\frac{1}{3}BC$. Karena $-1 \leq j_p(s) \leq +1$ maka nilai J-characteristic baku (*normalized J-characteristic*) yang didefinikan sebagai

$$\rho_p(s) = \frac{J_p(s)}{N}$$

akan bernilai $0 \leq \rho_p(s) \leq +1$.

Seandainya r adalah bilangan bulat terkecil sehingga $\max\limits_{|s|=r} J_r(s) > 0$, maka *generalized resolution* didefinisikan sebagai

$$R = r + \delta \text{ dengan } \delta = 1 - \max_{|s|=r} \frac{J_r(s)}{N} = 1 - \max_{|s|=r} \rho_r(s).$$

Perhatikan bahwa untuk rancangan FF reguler, nilai $\rho_p(s)$ bernilai 0 dan 1 sehingga $\delta = 0$.

4.2 *Minimum G-Aberration* dan *Minimum G_2-Aberration*

Pada tulisan mengenai rancangan FF reguler disebutkan bahwa beberapa rancangan yang memiliki resolusi yang sama, bisa dibedakan menggunakan kriteria minimum aberration. Ide ini juga digunakan Deng dan Tang (1999) untuk mendefinisikan kriteria *minimum G-aberration* dalam membedakan rancangan non-reguler yang memiliki *generalized resolution* yang sama.

Rancangan FF non-reguler ortogonal selalu memiliki run sebanyak n yang merupakan kelipatan 4, atau bisa dituliskan $n = 4t$. Deng dan Tang (1999) mengusulkan kriteria *minimum generalized aberration* atau *minumum G-aberration* yaitu rancangan yang secara berurutan meminimunkan unsur-unsur pada *confounding frequency vector* yang didefinisikan sebagai

$$F = [(f_{31}, ..., f_{3t}); (f_{21}, ..., f_{2t}); ...; (f_{m1}, ..., f_{mt})]$$

dengan f_{kj} adalah frekuensi kombinasi k kolom yang memikiki $J_k(s) = n + 1 - j$.

Kriteria *minimum G-aberration* merupakan kriteria yang sangat ketat. Selanjutnya Tang dan Deng (1999) mengusulkan kriteria lain yang lebih lunak yang disebut sebagai *minimum G_2-aberration.* Kriteria ini meminimumkan secara berurutan unsur-unsur vektor $B = (B_3, B_4, ..., B_m)$ dengan B_k didefinisikan sebagai

$$B_k(R) = n^{-2} \sum_{|s|=k} J_k^2(s).$$

Andaikan dua buah rancangan R_1 dan R_2, dan r adalah bilangan bulat terkecil sehingga $B_r(R_1) \neq B_r(R_2)$. Rancangan R_1 disebut sebagai *less G_2-aberration* dibandingkan R_2 jika $B_r(R_1) < B_r(R_2)$. Jika tidak ada rancangan lain yang bersifat *less G_2-aberration* dibandingkan R_1, maka rancangan R_1 ini disebut rancangan *minimum G_2-aberration.*

Jika R adalah rancangan FF reguler dua taraf, maka $B_k(R) = A_k(R)$ pada vektor *word length pattern* (lihat tulisan Bagian 1). Sehingga dapat dikatakan bahwa vektor B adalah vektor *generalized word length pattern* untuk rancangaan FF dua taraf, kerena berlaku baik untuk rancangan reguler maupun non-reguler.

4.3 *Generalized Minimum Aberration*

Dua kriteria klasifikasi sebelumnya hanya berlaku untuk rancangan FF non-reguler dua taraf. Menggunakan dasar pemikiran yang serupa dengan Tang dan Deng (1999), Xu dan Wu (2001) menyusun kriteria yang dapat diaplikasikan untuk rancangan non-reguler lain, termasuk yang asimetrik atau *mixed level.*

Andaikan rancangan yang kita miliki adalah rancangan berukuran n run dengan m faktor yang masing-masing memiliki s_i taraf, maka OA yang digunakan dapat dituliskan sebagai OA$(n, s_1 \times s_2 \times ... \times s_m)$. Xu dan Wu (2001) mengusulkan penyusunan *generalized word length pattern* (GWLP) $W = (A_3, A_4, ..., A_m)$ dengan prosedur sebagai berikut.

Pertama, setiap kolom yang terdiri s taraf diganti menjadi $(s-1)$ kolom kontras ortogonal. Kemudian setiap kontras dinormalkan sehingga memiliki panjang akar kuadrat dari n. Selanjutnya lakukan perkalian p kolom kontras dari p faktor yang berbeda. Nilai dari perkalian p kolom itu adalah $x_{ik}^{(p)}$. Selanjutnya A_p diperoleh menggunakan formula

$$A_p = \sum_{k=1}^{n_p} \left| \sum_{i=1}^{n} x_{ik}^{(p)} \right|^2$$

Kriteria *generalized minimum aberration* diperoleh dengan secara berurutan meminimumkan unsur pada vektor *generalized word length pattern* $W = (A_3, A_4, ..., A_m)$.

Yang menarik dari formula yang diusulkan Xu dan Wu (2001) ini adalah sifatnya yang invarian terhadap kontras ortogonal yang digunakan. Bagaimanapun bentuk kontrasnya, akan menghasilan vektor GWLP yang sama.

4.4 Minimum Moment Aberration

Pengklasifikasian rancangan non-reguler menggunakan *genaralized minimun aberration* yang diusulkan oleh Xu dan Wu (2001) merupakan cara yang paling populer dan banyak digunakan. Hal ini mengingat bahwa kriteria ini memiliki interpretasi yang menarik secara statistika. Namun demikian, penghitungannya membutuhkan proses komputasi yang lumayan lama (Xu, 2003), terutama pada saat jumlah faktornya besar atau jumlah tarafnya banyak. Perlu diingat bahwa dalam menghitung A_p untuk vektor GWLP, setiap faktor dengan s_i taraf harus diganti dengan $(s-1)$ kontras terlebih dahulu. Sehingga jumlah kolom yang digunakan pada akhirnya akan membesar untuk rancangan yang melibatkan faktor dengan taraf lebih dari dua.

Selanjutnya Xu (2003) mengusulkan penggunaan kriteria baru yang didasarkan pada keberagaman antar baris. Sebelumnya, berbagai kriteria bekerja dengan melihat keterkaitan antar kolom atau antar faktor. Dengan bekerja berdasarkan baris, Xu (2003) menyebutkan bahwa proses komputasinya jauh lebih murah.

Andaikan suatu rancangan dengan n run dan m faktor yang masing-masing memiliki s taraf. Jadi tabel rancangan berupa matriks R berukuran $n \times m$ dimana setiap kolom memiliki unsur r_{ij} bernilai 0, 1, ..., $(s-)$. Untuk suatu bilangan bulat t didefinisikan *power moment* ke-t sebagai

$$K_t(R) = \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^{-1} \sum_{1 \le i < j \le n} (\delta_{ij}(R))^t$$

dengan

$$\delta_{ij}(R) = \sum_{k=1}^{m} \delta(r_{ik}, r_{jk})$$

yaitu merupakan banyaknya unsur yang sama antara baris ke-i dan ke-j dan $\delta(x, y)$ adalah fungsi delta Kronecker yang nilainya 1 untuk $x = y$ dan 0 untuk selainnya.

Kriteria *minimum moment aberration* adalah kriteria yang secara berurutan meminimumkan *power moment* $K_i(R)$ dengan $i = 1, 2, ..., m$.

Andaikan terdapat dua buah rancangan R_1 dan R_2 yang berukuran OA(n, s^m). Rancangan R_1 dikatakan *less moment aberration* dibandingkan R_2 jika ada t sehingga $K_t(R_1) < K_t(R_2)$ dan

$K_i(R_1) = K_i(R_2)$ untuk $i = 1, ..., (t-1)$. Jika tidak ada rancangan lain yang bersifat *less moment aberration* dibandingkan R_1 maka rancangan R_1 ini disebut rancangan yang *minimum moment aberration.*

Xu (2003) menunjukkan bahwa K_t dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari $A_t, A_{t-1}, ..., A_1$ yang ada pada vektor GWLP (lihat bab tentang *generalized minimum aberration*) dan memiliki koefisien positif untuk suku A_t. Dengan demikian meminimumkan K_t juga meminimumkan A_t, sehingga rancangan yang memenuhi *minimum moment aberration* juga memenuhi sebagai kriteria *generalized minimum aberration.*

5 Klasifikasi Rancangan FF Non-Reguler Berdasarkan Proyeksi

Kriteria-kriteria yang digunakan untuk klasifikasi yang telah didiskusikan di atas berguna untuk menilai suatu rancangan FF, namun cenderung mendasarkan pada prinsip hirarki dalam analisisnya. Seperti yang telah disingung pada tulisan bagian pertama, ada tiga prinsip yang digunakan terkait dengan rancangan FF: (1) prinsip *sparsity*, yaitu dari sekian banyak faktor hanya sedikit saja yang aktif/signifikan, (2) prinsip *hierarchy*, yaitu pengaruh dengan ordo lebih rendah lebih penting, sehingga pengaruh utama adalah yang paling penting, dan (3) prinsip *heredity*, yaitu jika ada pengaruh interaksi yang aktif maka pengaruh utama dari salah satu faktor yang terlibat juga aktif.

Mendasarkan pada prinsip *sparsity*, bahwa hanya sedikit faktor saja yang aktif, maka timbul gagasan melakukan proyeksi rancangan. Proyeksi rancangan adalah membuang faktor yang tidak aktif dari tabel atau matriks rancangan. Andaikan semula ada 8 faktor dalam suatu percobaan, dan setelah analisis awal teridentifikasi hanya ada 3 faktor yang aktif, maka selanjutnya dapat dilakukan pembuangan 5 faktor yang tidak aktif dalam rancangan dan analisis dilakukan hanya melibatkan 3 faktor ini saja. Dengan cara ini, semakin banyak pengaruh interaksi yang melibatkan faktor aktif yang dapat diduga.

Tentu saja proyeksi ini ada gunanya jika mampu menyebabkan pengaruh interaksi yang semula tidak dapat diduga karena beralias penuh dengan pengaruh utama lain menjadi dapat diduga. Sayangnya tidak semua rancangan dapat menghasilkan proyeksi seperti ini. Untuk itulah mengetahui rancangan mana yang proyeksinya memberikan peluang untuk menduga sebanyak mungkin interaksi menjadi langkah yang penting dalam klasifikasi.

Berikut ini akan disampaikan beberapa kriteria yang diusulkan para ahli dalam melakukan klasifikasi, yang melibatkan informasi proyeksi rancangan.

5.1 Projection Efficiency

Andaikan suatu rancangan terdiri atas m faktor $x_1, x_2, ..., x_m$. Cheng dan Wu (2001) mengusulkan untuk menilai seberapa banyak proyeksi yang menyebabkan model ordo dua bersifat *eligible* dalam pengertian semua parameternya dapat diduga. Untuk faktor-faktor kualitatif model yang dimaksud adalah:

$$y = \mu + x_i + \sum_{i=1<j=k} x_i x_j$$

sedangkan untuk faktor kuantitatif

$$y = \beta_0 + \sum i = 1^k \beta_i x_i + \sum i = 1^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1<j<k} \beta_{ij} x_i x_j$$

dengan $k \leq m$ adalah jumlah faktor yang aktif.

Rancangan dengan m faktor dapat diproyeksikan menjadi $\binom{m}{3}$ rancangan tiga faktor, $\binom{m}{4}$ rancangan empat faktor, dan seterusnya. Dari setiap gugus proyeksi rancangan ke dalam i faktor, belum tentu semua menyebabkan model di atas menjadi *eligible*. Jika $E_3, E_4, E_5, ...$ adalah banyaknya rancangan yang *eligible* untuk proyeksi ke dalam 3, 4, 5, ... faktor, Cheng dan Wu (2001) menyarankan untuk memilih yang maksimum.

Lebih lanjut, meskipun suatu model *eligible* perlu diingat bahwa antar pengaruh atau antar koefisien dapat saja saling berkorelasi sehingga menyebabkan galat bakunya membesar. Untuk itu, Cheng dan Wu (2001) juga mengusulkan untuk menghitung rata-rata efisiensi dugaan menggunakan kriteria optimaliti tertentu. Xu, Cheng, dan Wu (2004) mengusulkan menggunakan rata-rata D_{eff} dari rancangan yang *eligible*.

Jika R adalah suatu rancangan dengan X adalah matriks rancangan yang sesuai dengan model di atas, rancangan *D-optimal* adalah rancangan yang memaksimumkan determinan matriks M = X'X. Andaikan R^* adalah suatu rancangan optimal sehingga $|M(R^*)| = \max_R |M(R)|$ maka *D-efficiency* dari suatu rancangan R didefinisikan sebagai

$$D_{eff} = \left(\frac{|M(R)|}{|M(R^*)|}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Sebagai rangkuman, kriteria ini bekerja dengan sebagai berikut. Andaikan E_i adalah banyaknya proyeksi i faktor yang eligible dan $\bar{D}_i$ adalah rata-rata D_{eff} dari seluruh proyeksi i faktor yang eligible. Cheng dan Wu (2001) serta Xu, Cheng, dan Wu (2004) mengusulkan kriteria ***projection-efficieny*** sebagai berikut:

1. Banyaknya proyeksi yang eligible hendaknya sebanyak mungkin, dan proyeksi ke dimensi yang lebih kecil lebih penting dibandingkan proyeksi ke dimensi yang lebih besar. Dengan demikian, secara berurutan maksimumkan $E_3, E_4, E_5, ...$

2. Dari seluruh proyeksi yang eligible, nilai efisiensi dugaan juga harus besar. Sehingga maksimumkan secara berurutan $\bar{D}_3$, $\bar{D}_4$, $\bar{D}_5$, ...

5.2 Projection Aberration

Pada saat menghitung nilai A_3 pada GWLP, nilai tersebut sebenarnya merupakan penjumlahan dari $\binom{m}{3}$ proyeksi rancangan tiga faktor. Artinya, seandainya setiap kombinasi tiga faktor dihitung nilai A_3-nya, maka total dari $\binom{m}{3}$ nilai itu akan sama dengan nilai A_3 dari rancangan lengkap m faktor. Nilai A_3 dari proyeksi rancangan disebut juga sebagai *projected* A_3 *value*.

Tidak semua proyeksi memiliki nilai A_3 yang berbeda. Dari nilai-nilai tersebut kita bisa menghitung sebaran frekuensinya, yang disebut sebagai *projection frequency*. Xu, Cheng, dan Wu (2004) mengusulkan kriteria ***projection aberration*** adalah kriteria yang meminimumkan nilai frekuensi tersebut secara berurutan yang dimulai dari nilai *projected* A_3 *value* yang paling besar. Hal ini dikarenakan proyeksi dengan nilai A_3 yang besar adalah proyeksi dengan tingkat pembauran yang tinggi atau bahkan bersifat penuh sehingga tidak bisa digunakan menduga parameter model.

5.3 Moment Aberration Projection

Sebelumnya Xu (2003) telah mengusulkan penggunaan kriteria *minimum moment aberration* yang didasarkan pada mencari rancangan yang meminimumkan unsur-unsur vektor *power moment* secara berurutan. Jika kriteria tersebut menghitung nilai-nilai *power moment* dari rancangan secara keseluruhan, Xu dan Deng (2005) mengusulkan penghitungan *power moment* dari proyeksinya dan kemudian mencari sebaran frekuensinya untuk dibandingkan.

Mengulang yang disampaikan sebelumnya pada sub-bab mengenai *minimum moment aberration*, andaikan kita memiliki sebuah rancangan R, n run dan m faktor, maka *power moment* ke-t, $K_t(R)$, dari rancangan ini didefinisikan sebagai

$$K_t(R) = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} (\delta_{ij}(R))^t$$

dengan

$$\delta_{ij}(R) = \sum_{k=1}^{m} \delta(r_{ik}, r_{jk})$$

yaitu merupakan banyaknya unsur yang sama antara baris ke-i dan ke-j dan $\delta(x, y)$ adalah fungsi delta Kronecker yang nilainya 1 untuk $x = y$ dan 0 untuk selainnya, dan r_{ij} adalah unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j dari R.

Jika dari m faktor yang dilibatkan hanya terdapat sedikit $p < m$ faktor yang aktif, maka mengevaluasi proyeksi ke dalam p faktor menjadi lebih penting. Terdapat sebanyak $\binom{m}{p}$ proyeksi yang bisa dibuat dan dari setiap proyeksi bisa dihitung K_t. Xu dan Deng (2005) mengusulkan hanya menghitung *power moment* ke-p untuk setiap proyeksi ke dalam p faktor, dan dilambangkan sebagai K_p. Selanjutnya dari sebanyak $\binom{m}{p}$ nilai K_p kita bisa menentukan sebaran frekuensi dari nilai-nilai yang mungkin. Vektor yang berisi frekuensi, dilambangkan $F_p(R)$, ini yang selanjutnya dibandingkan untuk melihat rancangan mana yang lebih baik.

Seandainya ada dua vektor f = $(f_1, f_2, ..., f_s)$ dan g = $(g_1, g_2, ..., g_s)$ dengan $f_1 > f_2 > ... > f_s$ dan $g_1 > g_2 > ... > g_s$. Dinotasikan f ¡ g jika ada i sehingga $f_i < g_i$ dan $f_j = g_j$ untuk semua $j < i$.

Andaikan ada dua rancangan R_1 dan R_2 berukuran nxm, dan p adalah bilangan bulat terkecil sehingga $F_p(R_1) \neq F_p(R_2)$. Rancangan R_1 dikatakan *less moment aberration projection* dibandingkan R_2 jika $F_p(R_1) < F_p(R_2)$.

5.4 Projection Estimation Capacity

Istilah ***projection estimation capacity*** (PEC) diusulkan oleh Loeppky, Sitter dan Tang (2007) yang idenya sejalan dengan *projection-efficiency* oleh Xu, Cheng, dan Wu (2004). Hanya saja Xu, Cheng, dan Wu (2004) dalam tulisannya hanya menitikberatkan pada rancangan dengan faktor tiga taraf.

Kriteria PEC memeringkatkan rancangan berdasarkan kemampuannya memberikan kemungkinan prediksi sebanyak mungkin terhadap model yang melibatkan k buah pengaruh utama dan semua interaksi dua faktor yang melibatkan k faktor tersebut.

Andaikan R adalah suatu rancangan berukuran n run dengan m buah faktor. Selanjutnya dari rancangan itu kita bisa memperoleh $\binom{m}{k}$ proyeksi rancangan ke dalam k faktor. Didefinisikan $\rho_k(R)$ adalah banyaknya proyeksi rancangan sehingga model yang melibatkan seluruh k pengaruh utama dan interaksi dua faktornya menjadi dapat diduga (*estimable*). Serta didefinisikan pula bahwa

$$p_k(R) = \frac{\rho_k(R)}{\binom{m}{k}}.$$

Barisan *projection estimation capacity* (PEC) adalah $(p_1, p_2, ..., p_m)$ yang diperoleh dari rancangan R.

Nilai p_i tidak lain adalah persentase dari jumlah proyeksi ke dalam rancangan i faktor yang *eligible* untuk menduga model yang terdiri atas seluruh pengaruh utama dan seluruh interaksi dua faktor yang melibatkan i faktor. Untuk kasus orthogonal array, jelas bahwa $p_1 = p_2 = 1$.

Rancangan yang memaksimumkan secara berurutan vektor $(p_1, p_2, ..., p_m)$ adalah rancangan yang lebih disukai berdasarkan kriteria PEC ini (Loeppky dan Sitter, 2007).

6 Daftar Pustaka

Box, G.E.P. dan Hunter, J.S. 1961. The 2^{k-p} fractional factorial designs. *Technometrics*, 3: 311-351 dan 449-458.

Cheng, SW. dan Wu CFJ. 2001. Factor Screening and Response Surface Exploration (with discussion). *Statistica Sinica*, 11: 553-604.

Fries, A. dan Hunter, W.G. 1980. Minimum aberration 2^{k-p} designs. *Technometrics*, 22: 601-608.

Xu, H. 2003. Minimum Moment Aberration for Nonregular Designs and Supersaturated Designs. *Statistica Sinica*, 13: 691-708.

Xu, H., Cheng, SW, dan Wu CFJ. 2004. Optimal Projective Three-Level Designs for Factor Screening and Interaction Detection. *Technometrics*, 46: 280-292.

Xu, H., dan Wu CFJ. 2001. Generalized Minimum Aberration for Asymmetrical Fractional Factorial Designs. *The Annals of Statistics*, 29: 1066-1077.

Wu, C.F.J. dan Hamada, M. 2000. *Experiments: Planing, Analysis and Parameter Design Optimization.* Wiley, New York.

Hedayat, AS., Sloane, NJA. dan Stufken, J. 1999. *Orthogonal Array: Theory and Applications.* Springer, New York.

Xu, H., dan Deng, LY. 2005. Moment Aberration Projection for Nonregular Fractional Factorial Designs. *Technometrics*, 47: 121-131.