

Rancangan Faktorial Pecahan

– Bagian 1: Rancangan Reguler –

Bagus Sartono

30 Desember 2008

1 Pendahuluan

Salah satu rancangan percobaan yang banyak digunakan orang adalah rancangan dengan perlakuan-perlakuan yang merupakan kombinasi dari beberapa faktor. Sebut saja para peneliti di bidang hortikultura misalnya, ingin melihat pengaruh jenis media tanam dan penyinaran terhadap kualitas warna bunga. Untuk melakukan ini perlakuan beberapa kombinasi antara jenis media dan intensitas penyinaran dicobakan.

Percobaan dengan perlakuan merupakan kombinasi silang antar taraf dari dua atau lebih faktor seperti ini dikenal sebagai percobaan faktorial. Dengan melakukan percobaan jenis ini, beberapa manfaat yang diperoleh antara lain adalah (1) menghemat biaya percobaan karena dapat dilakukan sekaligus, dan tidak melakukan satu per satu untuk setiap faktor, (2) selain dapat melihat faktor mana yang berpengaruh juga dapat melihat keberadaan interaksi antar faktor.

Jika pada percobaan hortikultura tadi ada 3 (tiga) taraf jenis media tanam (misalnya: serbuk kayu, arang, sekam) dan 2 (dua) taraf intensitas penyinaran (misalnya: tinggi, rendah), maka kita bisa mendapatkan 6 kombinasi perlakuan yaitu: serbuk kayu - intensitas tinggi, serbuk kayu - intensitas rendah, arang - intensitas tinggi, arang - intensitas rendah, sekam - intensitas tinggi, sekam - intensitas rendah. Seandainya, 6 buah perlakuan itu seluruhnya dilibatkan dalam percobaan maka rancangan percobaan yang digunakan dikenal sebagai **rancangan faktorial lengkap** (*full-factorial design*).

Banyaknya perlakuan yang terlibat dalam percobaan faktorial lengkap akan membengkak dengan semakin banyaknya faktor yang terlibat dan/atau banyaknya taraf di masing-masing faktor. Jika ada k buah faktor dan masing-masing memiliki s_1, s_2, \dots, s_k taraf, maka percobaan faktorial akan melibatkan $s_1 \times s_2 \times \dots \times s_k$ perlakuan, dan sering ditulis sebagai percobaan faktorial $s_1 \times s_2 \times \dots \times s_k$. Seandainya semua faktor memiliki jumlah taraf yang sama banyak yaitu sebesar s , maka dikenal sebagai percobaan faktorial lengkap s^k .

Biaya melakukan percobaan faktorial dapat menjadi sangat mahal dan tidak layak untuk dikerjakan dalam banyak kasus. Melibatkan $2^6 = 64$ satuan percobaan pada percobaan hortikultura semacam yang diilustrasikan di atas mungkin masih dapat terjangkau jika dikerjakan di ruang kaca dengan satuan percobaan berupa tanaman pada polybag. Tapi dalam percobaan budidaya di lahan sawah, tentu akan menjadi sangat mahal. Demikian juga dengan percobaan di industri, yang harus menghentikan proses produksi pada mesin tertentu karena digunakan untuk melakukan percobaan.

Pengurangan biaya ini dapat dilakukan dengan cara mengurangi perlakuan yang dicobakan. Artinya, dari gugus lengkap seluruh kombinasi hanya sebagian saja yang dilibatkan. Rancangan yang melibatkan sebagian saja kombinasi dari seluruh kemungkinan ini dinamakan **rancangan faktorial pecahan** (*fractional-factorial design*), selanjutnya dalam tulisan ini disebut rancangan FF.

Table 1: Rata-rata respon percobaan faktorial 2^2

| | | A | |
|---|---|----|----|
| | | + | - |
| B | + | 20 | 10 |
| | - | 30 | 26 |

Karena hanya sebagian perlakuan yang dicoba, tidak seluruh kombinasi, maka ada sesuatu yang harus dibayar atau dikorbankan. Sesuatu tersebut adalah **pembauran** (*confounding*) antar pengaruh. Jika pada percobaan faktorial lengkap, seluruh pengaruh utama dan pengaruh interaksi dapat diduga secara bebas, maka tidak pada rancangan FF. Konsep pembauran ini yang memegang peranan penting dalam menyusun rancangan FF, sehingga diperlukan diskusi khusus tentang ini.

Tulisan ini hanya akan membahas rancangan FF reguler. Perbedaan dengan rancangan FF non-reguler akan dibahas pada tulisan selanjutnya. Setelah mendiskusikan konsep pembauran, akan dibicarakan beberapa rancangan FF reguler umum dan beberapa teknik klasifikasi rancangan untuk menilai rancangan terbaik. Karena rancangan FF banyak digunakan sebagai rancangan percobaan awal dan *screening* maka taraf yang digunakan umumnya tidak banyak. Jumlah taraf 2 atau 3 adalah yang paling sering digunakan. Itu kenapa literatur mengenai rancangan FF reguler lebih banyak pada kondisi tersebut.

2 Pembauran (*confounding*)

Untuk menyederhanakan ilustrasi, perhatikan rancangan faktorial 2^2 berikut. Seandainya kedua faktor dinotasikan A dan B, dan kedua tarafnya masing-masing dinotasikan '+' dan '-', dan kita punya empat perlakuan yaitu (+, +), (+, -), (-, +), (-, -). Selanjutnya andaikan rata-rata dari setiap perlakuan diperoleh seperti pada Tabel 1.

Untuk menduga besarnya pengaruh utama faktor A maka kita hitung selisih rata-rata antara A(+) dengan A(-). Atau

$$A = \frac{([+, +] + [+,-]) - ([-, +] + [-,-])}{2} = \frac{(20 + 30) - (10 + 26)}{2} = 7$$

Dengan cara yang sama, pengaruh utama faktor B didapatkan sebagai berikut

$$B = \frac{([+, +] + [-,+]) - ([+,-] + [-,-])}{2} = \frac{(20 + 10) - (30 + 26)}{2} = -13$$

Sekarang seandainya kita tidak melakukan percobaan yang melibatkan keseluruhan empat perlakuan di atas, tetapi hanya melibatkan dua perlakuan saja. Sebut saja seandainya yang digunakan adalah perlakuan (+, +) dan (+, -). Jika itu yang menjadi pilihan, maka terlihat bahwa taraf yang digunakan untuk faktor A keduanya sama yaitu '+'. Tentu ini tidak lagi menjadi percobaan faktorial karena hanya satu faktor saja yaitu B yang berbeda tarafnya. Pilihan (-, +) dan (-, -) juga serupa, bedanya hanya faktor A diatur pada kondisi '-'.

Sebaliknya juga demikian jika kita gunakan dua perlakuan (+, +) dan (-, +) saja. Kali ini faktor B yang dibuat tetap, sehingga hanya menjadi percobaan faktor tunggal A saja.

Apa yang terjadi kalau yang kita libatkan adalah (+, +) dan (-, -)? Pada kasus ini, taraf faktor A-nya bervariasi. Demikian juga dengan taraf faktor B. Menggunakan dua perlakuan tersebut, pengaruh utama faktor A dapat diperoleh dengan cara menghitung selisih antara A(+) dengan A(-) yaitu

$$A = [+ , +] - [- , -] = 20 - 26 = -6$$

Sementara pengaruh utama faktor B diperoleh sebagai selisih antara B(+) dengan B(-)

$$B = [+ , +] - [- , -] = 20 - 26 = -6$$

Terlihat bahwa untuk menghitung besarnya pengaruh utama faktor B, digunakan formula yang sama dengan menghitung besarnya pengaruh utama faktor A. Jelas bahwa pada saat menghitung pengaruh utama A, maka sebenarnya itu juga menghitung pengaruh utama B. Dengan kata lain, pengaruh utama A dan B tidak bisa dibedakan atau disebut sebagai **terbaur** (*confounded*). Jadi, nilai sebesar -6 itu sebenarnya adalah pengaruh $A + B$.

Sebagai ilustrasi misalnya kalau kita punya dua tanaman kecil di dua pot dengan kondisi awal yang bisa dikatakan sama. Tanaman yang pertama diberi pupuk dan setiap hari disiram air dengan cukup. Sementara tanaman yang kedua tidak dipupuk dan tidak disiram air. Respon berupa variabel tinggi tanaman diukur pada hari kesepuluh, dan diperoleh bahwa tanaman pertama lebih tinggi dibandingkan tanaman kedua. Apa yang dapat disimpulkan? Faktor mana yang berpengaruh? Pupuk atau siraman airkah yang mempengaruhi perbedaan tinggi kedua tanaman tersebut? Tidak bisa dijawab, karena pengaruh pupuk dan siraman air terbaur.

Pembauran (*confounding*) ini menjadi isu utama dalam memilih rancangan FF karena setiap kita menerapkan rancangan FF maka pembauran ini akan terjadi. Artinya pada saat menggunakan rancangan FF maka akan ada pengaruh-pengaruh yang tidak dapat diduga secara bebas karena terbaur dengan pengaruh lain. Seandainya ada dua pengaruh yang saling terbaur, kita bisa mendapatkan dugaan salah satu pengaruh jika pengaruh yang satunya diabaikan atau dianggap nol.

Umumnya yang dilakukan adalah menganggap nol atau mengabaikan pengaruh interaksi tingkat tinggi. Ini merupakan implementasi dari prinsip *hierarchy* dengan menganggap pengaruh ordo rendah adalah pengaruh yang lebih penting. Dengan prinsip ini, pengaruh utama adalah pengaruh yang paling penting.

Menggunakan logika di atas maka rancangan FF yang dipilih adalah rancangan FF yang meminimumkan keberadaan pembauran antar pengaruh-pengaruh penting. Perlu diusahakan bahwa tidak ada pengaruh penting yang terbaur dengan pengaruh penting lainnya. Atau, pembauran diupayakan hanya terjadi antara pengaruh penting dengan pengaruh tidak penting. Jika yang tidak penting tadi diabaikan maka besarnya nilai pengaruh yang ingin diduga dapat dihitung.

3 Rancangan FF 2^{k-p}

Rancangan FF yang akan didiskusikan paling awal adalah yang paling sederhana yaitu 2^{k-p} . Rancangan ini melibatkan k faktor dua taraf. Alih-alih melibatkan 2^k perlakuan seperti pada rancangan faktorial lengkap, rancangan ini hanya menggunakan $\frac{1}{2^p}$ atau 2^{-p} dari total kombinasi atau sebanyak 2^{k-p} . Nilai 2^{-p} disebut sebagai **fraksi** rancangan.

Jadi rancangan 2^{7-3} , misalnya, adalah rancangan yang melibatkan 7 faktor dua taraf yang hanya melibatkan $\frac{1}{8}$ dari keseluruhan 128 kombinasi, atau sebanyak 16 perlakuan. Karena umumnya rancangan FF dikerjakan pada ulangan tunggal, maka juga ada sebanyak 16 satuan percobaan atau 16 run.

Pada tulisan ini tidak disinggung lagi tentang dasar-dasar pembangkitan rancangan FF, dan pembaca dapat memperolehnya di Montgomery (2005).

Untuk mendapatkan rancangan 2^{k-p} yang harus dilakukan adalah sebagai berikut. Pertama susun $(k - p)$ kolom yang berisi 2^{k-p} kombinasi lengkap dari $(k - p)$ faktor. Notasi yang digunakan untuk

Table 2: Empat kolom pertama rancangan 2^{7-3}

| run | A | B | C | D | E | F | G |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | + | + | + | | | |
| 2 | + | + | + | - | | | |
| 3 | + | + | - | + | | | |
| 4 | + | + | - | - | | | |
| 5 | + | - | + | + | | | |
| 6 | + | - | + | - | | | |
| 7 | + | - | - | + | | | |
| 8 | + | - | - | - | | | |
| 9 | - | + | + | + | | | |
| 10 | - | + | + | - | | | |
| 11 | - | + | - | + | | | |
| 12 | - | + | - | - | | | |
| 13 | - | - | + | + | | | |
| 14 | - | - | + | - | | | |
| 15 | - | - | - | + | | | |
| 16 | - | - | - | - | | | |

taraf setiap faktor adalah '+' dan '-'. Selanjutnya p faktor atau kolom lainnya diperoleh dengan mengalikan unsur kolom sebelumnya menggunakan p buah *generator* yang saling bebas.

Ilustrasi berikut diharapkan dapat memperjelas algoritma mendapatkan rancangan FF 2^{7-3} . Ada tujuh faktor yang terlibat dan kita notasikan A, B, ..., G. Proses diawali dulu dengan menyusun kombinasi lengkap dari $(7 - 3) = 4$ faktor A, B, C, dan D seperti yang kita peroleh pada Tabel 2

Tiga kolom berikutnya dibangkitkan dengan menggunakan 3 buah generator. Misalnya saja untuk ilustrasi kita gunakan generator

$$E = ABC \quad F = ACD \quad \text{dan } G = ABCD.$$

Maka unsur-unsur kolom E diperoleh dengan mengalikan unsur-unsur pada kolom A, B dan C. Demikian pula dengan kolom F yang diperoleh dari perkalian kolom A, C, dan D. Terakhir perkalian kolom-kolom A, B, C, dan D, menghasilkan kolom G.

Menerapkan ketiga generator tersebut, kita akan dapatkan 7 kolom lengkap rancangan 2^{7-3} seperti pada Tabel 3.

Perhatikan ketiga generator yang kita gunakan pada rancangan di atas, yaitu $E = ABC$, $F = ACD$, dan $G = ABCD$. Karena unsur pada kolom E didapat dari perkalian kolom A, B, dan C, maka kalau kolom ABCE akan menghasilkan kolom yang seluruhnya bernilai '+' dan sering dilambangkan sebagai I. Hal serupa juga didapatkan pada ACDF dan ABCDG. Hubungan

$$I = ABCE = ACDF = ABCDG$$

disebut sebagai *defining relation* atau *defining contrast subgroup*. Hubungan lain yang menghasilkan kolom I juga diperoleh melalui perkalian antar ketiganya yaitu

$$\begin{aligned} I &= ABCE \times ACDF = BDEF \\ I &= ABCE \times ABCDG = DEG \\ I &= ACDF \times ABCDG = BFG \\ I &= ABCE \times ACDF \times ABCDG = ACEFG. \end{aligned}$$

Hubungan di atas didapatkan mengingat $AA = BB = \dots = GG = I$.

Sehingga *defining relation* dari rancangan di atas adalah

Table 3: Rancangan 2^{7-3} dengan generator $E = ABC$, $F = ACD$, dan $G = ABCD$.

| run | A | B | C | D | E | F | G |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | + | + | + | + | + | + |
| 2 | + | + | + | - | + | - | - |
| 3 | + | + | - | + | - | - | - |
| 4 | + | + | - | - | - | + | + |
| 5 | + | - | + | + | - | + | - |
| 6 | + | - | + | - | - | - | + |
| 7 | + | - | - | + | + | - | + |
| 8 | + | - | - | - | + | + | - |
| 9 | - | + | + | + | - | - | - |
| 10 | - | + | + | - | - | + | + |
| 11 | - | + | - | + | + | + | + |
| 12 | - | + | - | - | + | - | - |
| 13 | - | - | + | + | + | - | + |
| 14 | - | - | + | - | + | + | - |
| 15 | - | - | - | + | - | + | - |
| 16 | - | - | - | - | - | - | + |

$$I = BFG = DEG = ABCE = ACDF = BDEF = ABCDG = ACEFG.$$

Dapat dilihat bahwa dari tujuh *kata* pada hubungan di atas, terdapat 2 kata yang terdiri atas tiga huruf, 3 kata empat huruf, dan 2 kata lima huruf. Frekuensi kata berdasarkan banyaknya huruf yang dikenal dengan *word-length pattern* (WLP) ini nantinya akan dijadikan dasar mengklasifikasikan rancangan atau menilai rancangan mana yang lebih baik. Kita akan kembali membahas WLP pada bab lain.

Defining relation ini selanjutnya digunakan untuk menentukan pola pembauran atau peng-alias-an (*aliasing structure*). Yang dimaksud dengan pola peng-alias-an ini adalah menentukan pengaruh mana yang saling terbaaur. Untuk menentukan hal tersebut, kita dapat memperoleh dengan cara mengalikan suatu pengaruh dengan seluruh kata pada *defining relation*. Misalkan, untuk menentukan pengaruh apa saja yang terbaaur dengan pengaruh utama faktor A, maka diperoleh dari

$$\begin{aligned} A &= A \times BFG = ABDF \\ A &= A \times DEG = ADEG \\ A &= A \times ABCE = BCE \\ A &= A \times ACDF = CDF \\ A &= A \times BDEF = ABDEF \\ A &= A \times ABCDG = BCDG \\ A &= A \times ACEFG = CEFG \end{aligned}$$

Sehingga secara lengkap dapat dituliskan pembauran yang melibatkan pengaruh utama A adalah $A = BCE = CDF = ABFG = ADEG = BCDG = CEFG = ABDEF$.

Dengan cara yang sama kita bisa dapatkan aliasi dari pengaruh utama yang lain sebagai berikut:

$$\begin{aligned} B &= FG = ACE = DEF = ACDG = BDEG = ABCDF = ABCEFG \\ C &= ABE = ADF = ABDG = ACFG = BCFG = CDEG = BCDEF \\ D &= EG = ACF = BEF = ABCG = BDFG = ABCDE = ACDEFG \\ E &= DG = ABC = BDF = ACFG = BEFG = ACDEF = ABCDEG \\ F &= BG = ACD = BDE = ACEG = DEFG = ABCEF = ABCDFG \\ G &= BF = DE = ABCD = ACEF = ABCEG = ACDFG = BCEFG \end{aligned}$$

Sedangkan untuk beberapa pengaruh interaksi dua faktor, selain yang terlibat di atas, kita dapatkan

$$\begin{aligned}
AB &= CE = AFG = CDG = ADEF = BCDF = ABDEG = BCEFG \\
AC &= BE = DF = BDG = EFG = ABCFG = ACDEG = ABCDEF \\
AD &= CF = AEG = BCG = ABEF = BCDE = ABDFG = CDEFG \\
AE &= BC = ADG = CFG = ABDF = CDEF = ABEFG = BCDEG \\
AF &= CD = ABG = CEG = ABDE = BCEF = ADEFG = BCDFG \\
AG &= ABF = ADE = BCD = CEF = BCEG = CDFG = ABCEFG
\end{aligned}$$

Dari *aliasing structure* di atas terlihat bahwa sebagian pengaruh utama beralias dengan pengaruh interaksi dua faktor dan sebagian tidak. Pengaruh utama A dan C tidak beralias dengan satu pun pengaruh interaksi dua faktor, sedangkan pengaruh utama lainnya memiliki alias seperti itu. Pengaruh yang tidak beralias dengan pengaruh interaksi dua faktor oleh Wu dan Hamada (2000) disebut sebagai pengaruh yang *clear*. Jika dia tidak beralias dengan interaksi dua faktor maupun tiga faktor disebut *strongly clear*. Jadi dalam hal ini pengaruh utama A dan C adalah pengaruh yang *clear*.

Sekarang kita lihat rancangan 2^{7-3} lain yang menggunakan *generator* berbeda yaitu

$$E = ABC \quad F = ABD \quad \text{dan } G = ACD.$$

Rancangan ini memiliki *defining relation* $I = ABCE = ABDF = ACDG = CDEF = BDEG = BCFG = ACFG$. Dan struktur alias untuk setiap pengaruh utama adalah:

$$\begin{aligned}
A &= BCE = BDF = CDG = EFG = ABCFG = ABDEG = ACDEF \\
B &= ACE = ADF = CFG = DEG = ABCDG = ABEFG = BCDEF \\
C &= ABE = ADG = BFG = DEF = ABCDF = ACEFG = BCDEG \\
D &= ABF = ACG = CFG = DEG = ABCDE = ABEFG = BCDEF \\
E &= ABC = AFG = BDG = CDF = ABDEF = ACDEG = BCEFG \\
F &= ABD = AEG = BCF = CDE = ACDFG = ABCEF = BDEFG \\
G &= ACD = AEF = BDE = BCF = ABCEG = ABDFG = CDEFG
\end{aligned}$$

Berbeda dengan sebelumnya, pada rancangan ini semua pengaruh utama bersifat *clear* karena tidak beralias dengan pengaruh interaksi dua faktor. Artinya, pengaruh utama dapat diduga secara bebas dari interaksi dua faktor.

Ilustrasi di atas kiranya jelas memberikan gambaran bahwa pemilihan *generator* sangat menentukan struktur alias antar pengaruh, dan dengan demikian menentukan kualitas rancangan. Rancangan dengan *generator* yang menyebabkan pengaruh penting beralias dengan pengaruh penting lainnya sangat tidak disarankan untuk digunakan. Pada bagian lain selanjutnya nanti kita akan diskusikan mengenai klasifikasi rancangan dimana kita bisa menilai seberapa baik rancangan yang kita gunakan.

4 Rancangan FF 3^{k-p}

Berikut akan kita diskusikan penyusunan rancangan 3^{k-p} yang melibatkan k buah faktor tiga taraf. Ide dasar yang digunakan mirip dengan rancangan 2^{k-p} kecuali ada beberapa perhitungan yang membedakannya. Notasi taraf yang digunakan adalah 0, 1, dan 2.

Algoritma dasar penyusunan tabel rancangan adalah sebagai berikut. Pertama disusun terlebih dahulu kombinasi lengkap $(k-p)$ faktor. Selanjutnya p buah faktor lainnya dibangkitkan dengan *generator* yang kita tentukan seperti halnya pada kasus dua taraf. Jika pada kasus dua taraf unsur kolom atau faktor yang baru diperoleh dari hasil perkalian, pada tiga taraf ini digunakan operasi **modulus**

Table 4: Tiga kolom pertama rancangan 2^{5-2}

| run | A | B | C | D | E |
|-----|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| 2 | 1 | 0 | 0 | | |
| 3 | 2 | 0 | 0 | | |
| 4 | 0 | 1 | 0 | | |
| 5 | 1 | 1 | 0 | | |
| 6 | 2 | 1 | 0 | | |
| 7 | 0 | 2 | 0 | | |
| 8 | 1 | 2 | 0 | | |
| 9 | 2 | 2 | 0 | | |
| 10 | 0 | 0 | 1 | | |
| 11 | 1 | 0 | 1 | | |
| 12 | 2 | 0 | 1 | | |
| 13 | 0 | 1 | 1 | | |
| 14 | 1 | 1 | 1 | | |
| 15 | 2 | 1 | 1 | | |
| 16 | 0 | 2 | 1 | | |
| 17 | 1 | 2 | 1 | | |
| 18 | 2 | 2 | 1 | | |
| 19 | 0 | 0 | 2 | | |
| 20 | 1 | 0 | 2 | | |
| 21 | 2 | 0 | 2 | | |
| 22 | 0 | 1 | 2 | | |
| 23 | 1 | 1 | 2 | | |
| 24 | 2 | 1 | 2 | | |
| 25 | 0 | 2 | 2 | | |
| 26 | 1 | 2 | 2 | | |
| 27 | 2 | 2 | 2 | | |

3. Sekedar mengingatkan, operasi modulus 3 terhadap bilangan bulat akan selalu menghasilkan 0, 1, atau 2.

Karena setiap faktor memiliki tiga taraf maka ada dua derajat bebas di masing-masing. Dengan demikian, pemilihan generator juga lebih banyak. Misalnya saja jika taraf dari faktor D adalah fungsi dari taraf A dan B, maka pilihannya adalah $D = AB$, $D = AB^2$, $D = A^2B$, atau $D = A^2B^2$. Generator $D = AB$ berimplikasi bahwa

$$x_D = x_A + x_B \pmod{3}$$

Perhatikan bahwa $(2x_A + 2x_B \pmod{3})$ menghasilkan nilai yang hanya bertukar simbol 0, 1, 2 dengan $(x_A + x_B \pmod{3})$ sehingga generator $D = A^2B^2$ dan $D = AB$ dapat saling menggantikan. Hal yang sama juga terjadi pada $D = AB^2$ dan $D = A^2B$. Konvensi yang umum diikuti adalah menggunakan generator dengan pangkat satu pada huruf pertama. Konvensi ini juga berlaku pada penulisan *defining relation* dan struktur alias.

Sebagai ilustrasi, kita perhatikan suatu rancangan 3^{5-2} , yang melibatkan 5 faktor tiga taraf (A, B, C, D, E) dalam 27 runs. Prosesnya diawali dengan menyusun tabel kombinasi lengkap dari tiga buah faktor A, B, C seperti pada Tabel 4

Andaikan generator yang digunakan adalah $D = ABC^2$ dan $E = BC$. Itu berarti bahwa

$$\begin{aligned} x_D &= x_A + x_B + 2x_C \pmod{3} \\ x_E &= x_B + x_C \pmod{3} \end{aligned}$$

Table 5: Rancangan 2^{5-2} dengan generator $D = ABC^2$ dan $E = BC$

| run | A | B | C | D | E |
|-----|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 6 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| 9 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 12 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 15 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 16 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 17 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 |
| 18 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 19 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| 20 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 21 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 22 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 |
| 23 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 |
| 24 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 25 | 0 | 2 | 2 | 0 | 1 |
| 26 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 27 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |

Sebagai ilustrasi pada run ke-15, kita memiliki $x_A = 2$, $x_B = 1$ dan $x_C = 1$, sehingga

$$x_D = 2 + 1 + 2 * 1 \pmod{3} = 5 \pmod{3} = 2$$

$$x_E = 1 + 1 \pmod{3} = 2 \pmod{3} = 2$$

Dengan melakukan operasi seperti tersebut pada baris-baris lainnya, maka dapat diperoleh tabel rancangan pada Tabel 5.

Mengingat bahwa $A^3 = B^3 = \dots = E^3 = I$, maka *defining relation* dari rancangan di atas adalah

$$D = ABC^2 \rightarrow I = ABC^2D^2$$

$$E = BC \rightarrow I = BCE^2$$

$$I = (ABC^2D^2)(BCE^2) = AB^2D^2E^2$$

$$I = (ABC^2D^2)(BCE^2)^2 = ACD^2E$$

5 Klasifikasi Rancangan FF Reguler

Pada bagian ini didiskusikan dua kriteria umum dalam menentukan kebaikan suatu rancangan FF reguler. Kegiatan menilai suatu rancangan berdasarkan kriteria tertentu dikenal sebagai **klasifikasi**. Seperti yang telah sedikit disinggung, rancangan yang baik adalah yang meminimumkan kondisi kejadian pengaruh penting beralias dengan pengaruh penting lainnya. Sesuai dengan prinsip *hierarchy*, pengaruh dengan ordo lebih rendah lebih penting dibanding ordo tinggi. Yang dimaksud pengaruh

ordo p adalah pengaruh yang melibatkan p buah faktor. Sehingga dengan prinsip ini pengaruh utama lebih penting dibandingkan interaksi dua faktor, selanjutnya lebih penting dibanding interaksi tiga faktor, dan seterusnya.

Dua kriteria yang akan disinggung adalah *maximum resolution* dan *minimum aberration*.

5.1 Maximum Resolution (Box dan Hunter, 1961)

Penggunaan kriteria **resolusi** diusulkan oleh Box dan Hunter (1961) yang didasarkan pada keberadaan pembauran antar pengaruh dengan ordo tertentu. Suatu rancangan FF reguler dikatakan memiliki ordo r jika setiap pengaruh ordo p tidak beralias dengan pengaruh lain yang berordo kurang dari $(r - p)$. Besarnya resolusi dilambangkan dengan angka Romawi. Dengan demikian:

- Pada rancangan R_{III} , pengaruh utama tidak beralias dengan pengaruh utama lainnya, tetapi pengaruh utama beralias dengan pengaruh interaksi dua faktor.
- Pada rancangan R_{IV} , pengaruh utama tidak beralias dengan pengaruh utama lainnya maupun pengaruh interaksi dua faktor, tetapi beralias dengan interaksi tiga faktor. Interaksi dua faktor beralias dengan interaksi dua faktor lainnya.
- Pada rancangan R_V , pengaruh utama tidak beralias dengan pengaruh utama lainnya, pengaruh interaksi dua faktor maupun tiga faktor; tetapi beralias dengan interaksi empat faktor. Interaksi dua faktor beralias dengan interaksi tiga faktor.

Kembali kepada ilustrasi rancangan 2^{7-3} pada bab terdahulu, rancangan yang pertama dengan generator $E = ABC, F = ACD, dan G = ABCD$ adalah rancangan R_{III} . Sedangkan rancangan kedua dengan generator $E = ABC, F = ABD, dan G = ACD$ adalah R_{IV} .

Dengan rancangan R_{IV} , seluruh pengaruh utama bersifat *clear*. Sedangkan pada R_V , seluruh pengaruh utama bersifat *strongly clear* dan interaksi dua faktor bersifat *clear*. Berdasarkan definisi resolusi ini kiranya jelas bahwa rancangan dengan resolusi yang lebih besar adalah rancangan yang lebih diinginkan. Sehingga Box dan Hunter (1961) menyatakan bahwa rancangan yang baik adalah yang memiliki resolusi maksimum (*maximum resolution*).

Perhatikan deretan *defining relation* dari dua ilustrasi rancangan 2^{7-3} pada bab sebelumnya

$$R_1 : I = BFG = DEG = ABCE = ACDF = BDEF = ABCDG = ACEFG$$

$$R_2 : I = ABCE = ABDF = ACDG = CDEF = BDEG = BCFG = ACFG$$

Andaikan kita susun suatu vektor $W = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7)$ dengan A_j adalah banyaknya 'kata' pada *defining relation* yang memiliki panjang j huruf, maka kita peroleh

$$W_1 = (0, 0, 2, 3, 2, 0, 0)$$

$$W_2 = (0, 0, 0, 7, 0, 0, 0)$$

Vektor W disebut sebagai *word length pattern* (WLP) dan merupakan konsep yang mendasari banyak penyusunan kriteria rancangan FF.

Besarnya resolusi rancangan FF reguler dapat ditentukan dari WLP rancangan tersebut. Suatu rancangan memiliki resolusi r jika dan hanya jika r merupakan nilai terkecil sehingga $A_r > 0$. Pada R_1 nilai r adalah 3 sehingga itu adalah R_{III} , sedangkan pada R_2 bernilai 4 sehingga merupakan R_{IV} .

5.2 Minimum Aberration (Fries dan Hunter, 1980)

Perhatikan dua rancangan 2^{7-2} berikut ini, yang melibatkan 7 faktor dua taraf A, B, C, D, E, F, dan G. Rancangan yang pertama memiliki *generator* $F = ABCD$ dan $G = ABCE$. Sedangkan rancangan

kedua miliki *generator* $F = ABC$ dan $G = ADE$. Berdasarkan *generator* tersebut dapat diperoleh *defining relation* dan WLP sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \\ I = ABCDF = ABCEG = DEFG & I = ABCF = ADEG = BCDEFG \\ W_1 = (0, 0, 0, 1, 2, 0, 0) & W_2 = (0, 0, 0, 2, 0, 1, 0) \end{array}$$

Dengan melihat WLP dari keduanya, diperoleh bahwa keduanya merupakan rancangan dengan resolusi IV dan berdasarkan kriteria resolusi ini maka keduanya dinilai sama baiknya. Karena merupakan R_{IV} maka seluruh pengaruh utama bersifat *clear*, namun interaksi dua faktor saling beralias dengan interaksi dua faktor lainnya. Pada rancangan R_1 , terdapat tiga pasangan interaksi yang saling beralias yaitu (DE, FG) , (DF, EG) dan (DG, EF) . Sedangkan untuk rancangan R_2 ada enam pasangan (AB, CF) , (AC, BF) , (AF, BC) , (AD, EG) , (AE, DG) , dan (AG, DE) .

Berdasarkan ilustrasi ini jelas bahwa meskipun dua rancangan memiliki resolusi yang sama, tetapi ada kemungkinan memiliki kualitas yang berbeda. Dalam ilustrasi di atas, R_1 lebih baik dibandingkan R_2 karena memiliki lebih banyak interaksi dua faktor yang *clear*. Hal ini tercermin dari WLP.

Kedua rancangan tersebut tidak memiliki kata pada *defining relation* yang panjangnya 3 huruf sehingga $A_3 = 0$ yang berarti bahwa tidak ada pengaruh utama yang berinteraksi dengan interaksi dua faktor. Sementara masing-masing memiliki kata dengan panjang 4 huruf, bedanya adalah R_1 memiliki 1 kata, sedangkan di R_2 ada 2 kata. Kata dengan panjang 4 ini mewakili frekuensi pembauran antar sesama interaksi dua faktor dan antara pengaruh utama dengan interaksi tiga faktor. Karena $A_4(R_1)$ lebih kecil daripada $A_4(R_2)$ maka jumlah pasangan interaksi dua faktor yang saling beralias juga lebih sedikit.

Ide ini selanjutnya dituangkan oleh Fries dan Hunter (1980) dalam kriteria yang disebut *minimum aberration* yang didefinisikan sebagai berikut

Andaikan terdapat dua rancangan FF reguler R_1 dan R_2 dan r adalah bilangan bulat terkecil sehingga $A_r(R_1) \neq A_r(R_2)$. Rancangan R_1 disebut memiliki *aberration* lebih rendah (*less aberration*) dibandingkan R_2 jika $A_r(R_1) < A_r(R_2)$. Jika tidak ada rancangan yang memiliki *aberration* lebih rendah dibandingkan R_1 , maka rancangan R_1 memiliki sifat *minimum aberration*.

Katalog yang berisi rancangan-rancangan yang bersifat *minimum aberration* antara lain dapat ditemukan di Chen, Sun, dan Wu (1993) untuk murni dua dan tiga taraf; Wu dan Hamada (2000); Wu dan Zhang (1993) untuk campuran empat dan dua taraf.

6 Pengenalan Konsep Proyeksi Rancangan

Proyeksi terhadap suatu rancangan pada dasarnya adalah menghilangkan satu atau lebih faktor/kolom dari suatu rancangan. Kegiatan proyeksi ini sangat berguna dalam melakukan analisis data hasil percobaan dengan rancangan FF.

Seperti yang sempat disinggung di bagian pendahuluan, rancangan FF umum digunakan pada percobaan awal atau *screening* yang bertujuan untuk mengetahui faktor-faktor mana saja yang signifikan. Beberapa literatur menyebut faktor dan pengaruh yang signifikan sebagai faktor atau pengaruh **aktif**. Meskipun banyak faktor yang dicobakan, umumnya peneliti meyakini bahwa sebenarnya hanya ada sebagian kecil faktor yang aktif. Prinsip ini disebut sebagai prinsip *sparsity*, mirip dengan konsep Pareto. Tentu saja walaupun meyakini ada sedikit yang aktif tapi tidak diketahui faktor mana saja sehingga percobaan dilangsungkan dengan banyak faktor.

Adanya banyak faktor dengan jumlah run yang terbatas menyebabkan tidak semua pengaruh utama dan interaksi dapat diduga. Ini sudah kita singgung sebelumnya.

Andaikan kondisinya seperti ini. Percobaan dilakukan menggunakan rancangan 2^{7-3} . Artinya ada 7 faktor dua taraf yang terlibat dalam 16 runs. Hanya ada 15 pengaruh utama dan interaksi yang bisa diduga, sehingga sebagian besar pengaruh tidak mungkin bisa kita dapatkan dugaannya. Namun demikian, jika berdasarkan hasil analisis awal diperoleh bahwa dari 7 faktor yang aktif hanya sedikit, misal 3 buah faktor saja, maka dengan menyisakan hanya tiga kolom aktif dalam analisis banyaknya pengaruh yang akan diduga adalah: 3 pengaruh utama, 3 pengaruh interaksi dua faktor, dan 1 pengaruh interaksi tiga faktor. Runs sebanyak 16 tentu cukup untuk menduga 7 pengaruh tersebut dan tambahan 1 nilai rata-rata umum.

Namun perlu diingat bahwa walaupun derajat bebas setelah dilakukan proyeksi cukup banyak untuk menduga pengaruh utama dan interaksi faktor yang aktif, belum tentu antar pengaruh itu saling bebas atau tidak beralias.

Kembali ke ilustrasi rancangan $2^{7-3} R_1$ dengan *defining relation* $I = BFG = DEG = ABCE = ACDF = BDEF = ABCDG = ACEFG$. Seandainya tiga faktor yang aktif adalah A, C, dan E, maka 7 pengaruh utama dan interaksi dapat diduga dengan bebas karena antara A, C, E, AC, AE, CE, dan ACE tidak saling beralias.

Tetapi jika pada percobaan itu yang aktif adalah faktor B, F, dan G, maka kita tidak dapat menduga seluruh pengaruh B, F, G, BF, BG, FG, dan BFG dengan bebas. Ini dikarenakan pengaruh utama B beralias dengan FG, juga F beralias dengan BG, serta G beralias dengan BF. Jadi, dalam kasus rancangan ini tidak semua proyeksi dapat menghasilkan rancangan baru sehingga setiap pengaruh dapat dengan bebas dihitung dugaannya.

Sekarang kita lihat rancangan yang $2^{7-3} R_2$ dengan $I = ABCE = ABDF = ACDG = CDEF = BDEG = BCFG = ACFG$. Seandainya tiga faktor yang aktif adalah A, C, dan E, maka 7 pengaruh utama dan interaksi dapat diduga dengan bebas karena antara A, C, E, AC, AE, CE, dan ACE tidak saling beralias. Hal yang sama juga terjadi jika yang aktif adalah faktor B, F, dan G. Dan bisa diperiksa bahwa ini berlaku untuk setiap tiga faktor.

Box dan Hunter (1961) menyatakan bahwa pada rancangan dengan resolusi r , maka setiap proyeksi ke $(r - 1)$ faktor apapun akan menghasilkan rancangan faktorial lengkap. Karena merupakan faktorial lengkap, maka seluruh pengaruh utama dan interaksinya dapat diduga secara bebas. Sifat ini mereka sebut sebagai *projective property*.

Dalam banyak kriteria lain yang akan didiskusikan pada tulisan tentang FF non-reguler, sifat proyeksi ini menjadi salah satu pertimbangan melakukan klasifikasi atau pemilihan rancangan yang baik.

7 Penutup

Pada dasarnya rancangan FF reguler berkembang pada saat muncul keinginan melibatkan banyak faktor dalam suatu percobaan namun tetap dapat dikerjakan dengan biaya yang terjangkau. Menjalankan sebagian kombinasi antar taraf faktor menyebabkan terjadinya pembauran antar pengaruh sehingga tidak bisa diduga dengan saling bebas. Peneliti harus berhati-hati memilih rancangan FF reguler, dengan memilih generator yang menghasilkan pembauran minimum antar pengaruh penting. Penerapan dari prinsip *hierarchy* mendorong Box dan Hunter (1961) mengusulkan kriteria resolusi maksimum, yang selanjutnya dipertajam oleh Fries dan Hunter (1980) dengan kriteria *minimum aberration*.

Meskipun adanya rancangan FF reguler ini banyak membantu peneliti dalam mengurangi biaya percobaan, ada beberapa hal yang kurang menguntungkan yang selanjutnya menimbulkan ide rancangan FF non-reguler. Jenis rancangan ini didiskusikan pada tulisan bagian kedua.

8 Daftar Pustaka

- Box, G.E.P. dan Hunter, J.S.** 1961. The 2^{k-p} fractional factorial designs. *Technometrics*, 3: 311-351 dan 449-458.
- Chen, J., Sun, D.X. dan Wu, C.F.J.** 1993. A catalogue of two-level and three-level fractional factorial designs with small runs. *Internat. Statist. Rev.*, 61: 131-145
- Fries, A. dan Hunter, W.G.** 1980. Minimum aberration 2^{k-p} designs. *Technometrics*, 22: 601-608.
- Montgomery, D.C.** 2005. *Design and analysis of experiments*. ed 6. Wiley, New York.
- Wu, C.F.J. dan Hamada, M.** 2000. *Experiments: Planning, Analysis and Parameter Design Optimization*. Wiley, New York.
- Wu, C.F.J dan Zhang, R.** 1993. Minimum aberration design with two-level and four-level factors. *Biometrika*, 80: 203-209.